Diferenciabilidade Complexa

Definição: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \text{int}D_f$. Diz-se que f **é diferenciável, ou tem derivada, no sentido complexo em** z_0 se existe o limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Quando este limite existe o seu valor designa-se por $f'(z_0)$ ou $\dfrac{df}{dz}(z_0)$.

Diz-se que f **é holomorfa, ou analítica num ponto** z_0 se f for diferenciável em todos os pontos duma bola centrada em z_0.

Diz-se que f **é inteira** se $D_f = \mathbb{C}$ e se f é diferenciável em todos os pontos $z \in \mathbb{C}$.

Teorema: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \text{int}D_f$. Então, se f é diferenciável em $z_0 \Rightarrow f$ é contínua em z_0.

Proposição: Sejam $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g : D_g \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ diferenciáveis em $z_0 \in \text{int} D_f \cap \text{int} D_g$. Então

- $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$
- $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z_0) = \dfrac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2} \quad (g(z_0) \neq 0)$,

e se $h : D_h \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é diferenciável em $w = f(z_0) \in \text{int} D_h$

$$(h \circ f)'(z_0) = h'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

Equações de Cauchy-Riemann

Teorema (Cauchy-Riemann): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \text{int}D_f$. Então, f é diferenciável em $z_0 = x_0 + i\,y_0$ (no sentido complexo) se e só se

- f é diferenciável em (x_0, y_0) no sentido de $\mathbb{R}^2$
- $f = u + iv$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann no ponto $z_0 = (x_0, y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \end{cases}$$

No caso em que $f'(z_0)$ existe, tem-se

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Proposição: Seja $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in \text{int}D_f$. Se f é de classe C^1 numa vinhança de (x_0, y_0), ou seja, se existe um aberto em torno desse ponto onde as primeiras derivadas de f existam e sejam contínuas, então f é diferenciável em (x_0, y_0) (no sentido de $\mathbb{R}^2$).

Proposição: As seguintes funções complexas são inteiras e tem-se

- $(e^z)' = e^z$
- $(\text{sen } z)' = \cos z$
- $(\cos z)' = -\text{sen } z$
- $(\text{senh } z)' = \cosh z$
- $(\cosh z)' = \text{senh } z$

Proposição (Regra de L'Hopital - Versão Simples): Sejam f, g funções diferenciáveis em z_0 tais que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ e $g'(z_0) \neq 0$. Então

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Conformalidade

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0) \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

Definição: Diz-se que uma aplicação é **conforme** num ponto do seu domínio, se preserva ângulos e orientações entre vectores tangentes, nesse ponto.

Teorema: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \text{int} D_f$. Então, se $f'(z_0) \neq 0$, f é conforme em z_0.

Teorema (Função Inversa): Seja $\mathbf{f} : D_{\mathbf{f}} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0) \in \text{int}D_{\mathbf{f}}$. Então, se o jacobiano de $\mathbf{f}$ em (x_0, y_0) for não nulo, $J\mathbf{f}(x_0, y_0) = \det D\mathbf{f}(x_0, y_0) \neq 0$, tem-se que

- existe uma vizinhança aberta $U_{(x_0,y_0)}$ de (x_0, y_0) e uma vizinhança aberta $V_{\mathbf{f}(x_0,y_0)}$ de $\mathbf{f}(x_0, y_0)$ tal que $\mathbf{f} : U_{(x_0,y_0)} \to V_{\mathbf{f}(x_0,y_0)}$ é uma bijecção

- a inversa $\mathbf{f}^{-1} : V_{\mathbf{f}(x_0,y_0)} \to U_{(x_0,y_0)}$ é diferenciável (no sentido de $\mathbb{R}^2$) em $\mathbf{f}(x_0, y_0)$

- a matriz jacobiana da inversa $\mathbf{f}^{-1}$ em $\mathbf{f}(x_0, y_0)$ é dada pela inversa da matriz jacobiana de $\mathbf{f}$ em (x_0, y_0)

$$D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(x_0, y_0)) = \Big(D\mathbf{f}(x_0, y_0)\Big)^{-1}.$$

Teorema (Função Inversa Complexa): Seja $f : D_{\mathbf{f}} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa no ponto $z_0 = x_0 + i\, y_0 \in \text{int} D_f$. Então, se $f'(z_0) \neq 0$ tem-se

- existe uma vizinhança aberta U_{z_0} de z_0 e uma vizinhança aberta V_{w_0} de $w_0 = f(z_0)$ tal que $f : U_{z_0} \to V_{w_0}$ é uma bijecção
- a inversa $f^{-1} : V_{w_0} \to U_{z_0}$ é diferenciável (no sentido complexo) em $w_0 = f(z_0)$
- a derivada da inversa f^{-1} em $w_0 = f(z_0)$ é dada pelo (número) inverso de $f'(z_0)$

$$(f^{-1})'(w_0) = (f^{-1})'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Proposição: Qualquer ramo do logoritmo complexo $\log_{\mathbb{C}} z = \log_{\mathbb{R}} |z| + i\, \text{Arg} z$, com $\text{Arg} z \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ é diferenciável complexo em $z \neq 0$ e $\text{Arg} z \neq \theta$ com

$$\log' z = \frac{1}{z}.$$